پاسخ سوال ۱

می‌توان تابع f(x) را به صورت ترکیبی از دو تابع x و |x| نوشت :

$$f(x) = \frac{۱}{۲}(x + |x|)$$

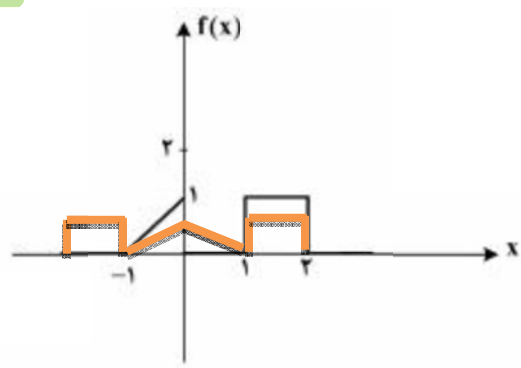
$$f(x) = \frac{۱}{۲}\left(-۲\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{k}\sin(kx) + \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(۲k-۱)x}{(۲k-۱)^۲}\right)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{۴} - \frac{۲}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(۲k-۱)x}{(۲k-۱)^۲}) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{k}\sin(kx)$$

بنابراین، گزینه ۱ صحیح است.

پاسخ سوال ۲

یادآوری : ۱- بسط زوج یک تابع $f_e(x) = \frac{۱}{۲}[f(x) + f(-x)]$



با توجه به اتحاد پارسوال انتگرال فوریه کسینوسی :

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{۲}(A(\omega))^۲ d\omega = \int_{۰}^{۲}(f_e(x))^۲ dx$$

$$\int_{۰}^{۲}(A(\omega))^۲ d\omega = \frac{۲}{\pi}\left[\int_{۰}^{۱}(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}x)^۲ dx + \int_{۱}^{۲}(\frac{۱}{۲})^۲ dx\right] = \frac{۲}{۳\pi}$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح است.

پاسخ سوال ۳

یادآوری : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx = 2\pi * B(\omega)$$

که در این سوال $B(\omega) = \dfrac{2\omega}{1+\omega^2}$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^\infty f(x)\left[3\sin x - \sin 3x\right] = \frac{1}{4} * 2\pi * \left[3B\left(\omega = 1\right) - B\left(\omega = 3\right)\right] = \frac{3\pi}{10}$$

بنابراین، گزینه ۱ صحیح است.

پاسخ سوال ۴

با توجه به پاسخ مشترک گزینه‌ها و همچنین شرط $u(b,y) = 0$ گزینه ۳ رد می‌شود و جواب کلی به صورت :

$$u_k(x,y) = Y.X = \left(e^{r_1 y} - e^{r_2 y}\right)\sin\alpha_k(b-x)$$

با شرط مرزی $u(a,y) = 0$

$$\sin\alpha_k(b-a) = 0 \qquad \alpha_k = \frac{k\pi}{b-a}$$

با جاگذاری $u_k(x,y) = X.Y$ در رابطه‌ی $u_{xx} + u_{yy} + u_y - u = 0$

$$Y'' + Y' - (\alpha_k^2 + 1)Y = 0 \qquad r^2 + r - (\alpha_k^2 + 1) = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(\alpha_k^2 + 1)}}{4}$$

بنابراین، گزینه ۴ صحیح است.

پاسخ سوال ۵

با جاگذاری بسط فوریه

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\sin(n\pi x)\ ,\quad F(x,t) = (1-x)\sin t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin(n\pi x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n^{۲}\pi^{۲}U_n(t)\sin(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(t)\sin(n\pi t)$$

$$-n^{۲}\pi^{۲}U_n(t) + F_n(t) = U_n'(t) \qquad U_n'(t) + n^{۲}\pi^{۲}U_n(t) = F_n(t)$$

رد گزینه‌های ۱و۲

بسط سینوسی تابع (1-x) :

$$b_n = \frac{۲}{۱}\int_{۰}^{۱}(۱-x)\sin n\pi x = ۲\left[-(۱-x)\frac{\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^{۲}\pi^{۲}}\right]_{۰}^{۱} = \frac{۲}{n\pi}$$

$$F_n(t) = \frac{۲\sin t}{n\pi}$$

بنابراین، گزینه ۳ صحیح است.

پاسخ سوال ۶

با جاگذاری شرط اولیه $y(x,0) = e^{-|x|}$ در پاسخ مسئله، خواهیم داشت :

$$e^{-|x|} = \int_{۰}^{\infty}[a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

چون تابع زوج است، در نتیجه $b(\omega) = ۰$ است :

$$a(\omega) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} e^{-x}\cos\omega x$$

حل این انتگرال به کمک تعریف لاپلاس $L\{\cos\omega x\} = \frac{s}{s^{۲}+\omega^{۲}}$ به ازای $s = ۱$:

$$a(\omega) = \frac{۲}{\pi(\omega^{۲}+۱)}$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح است.

پاسخ سوال ۷

با توجه به فرض مسئله برای جواب کراندار غیر صفر ، پاسخ نمایی آن باید دارای توان مثبت باشد.

با جاگذاری $w(x,y) = F(x)G(y)$:

$$F_x(x)G_y(y) + \gamma F(x)G(y) = ۰$$

$$\frac{F_x(x)G_y(y)}{F(x)G(y)} = -\gamma > ۰ \qquad \gamma < ۰$$

بنابراین، گزینه ۱ صحیح است.

پاسخ سوال ۸

$$\mathrm{Im}\left[\frac{(x+iy)}{\pi}(\cos hx\ \cos y + i\ \sin hx \sin y)\right] = \frac{x}{\pi}\sin hx \sin y + \frac{y}{\pi}\cos hx \cos y$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح است.

پاسخ سوال ۹

$$\mathrm{Im}\left[\log\frac{z-1}{z+1}\right] = \mathrm{Im}\,[\log f(z)] = \arg[f(z)] = c$$

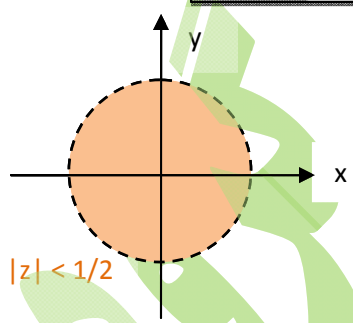
$$tan^{-1}\left(\frac{y}{x-۱}\right) - tan^{-1}\left(\frac{y}{x+۱}\right) = c$$

$$tan\, c = \frac{\frac{y}{x-۱} - \frac{y}{x+۱}}{۱ + \frac{y}{x-۱}\frac{y}{x+۱}} = \frac{۲y}{x^۲ + y^۲ - ۱}$$

$$\cot c = \frac{x^۲ + y^۲ - ۱}{۲y} \qquad x^۲ + (y - \cot c)^۲ = \frac{۱}{\sin^۲ c}$$

بنابراین، گزینه ۳ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۰



$$\left|e^{3z-i}\right| = \left|e^{3x-i(3y-1)}\right| = e^{3x}$$

$$\max\left\{e^{3x}\right\} = e^{\frac{3}{2}} \quad (\text{به ازای } x = \tfrac{1}{2})$$

بنابراین، گزینه ۴ صحیح است.

از سوال ۱۱ تا ۱۵ برای گرایش الکترونیک

پاسخ سوال ۱۱

$$w = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{A - \frac{1}{A}}{A + \frac{1}{A}} = \frac{A^2 - 1}{A^2 + 1} \qquad (A = e^z)$$

$$A^2 = e^{2z} = \frac{1 + w}{1 - w} = \frac{1 + u + iv}{1 - u - iv}$$

$$z = x + iy = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + u + iv}{1 - u - iv} = \frac{1}{2}(\operatorname{Ln} r + i\theta)$$

چون فرض سوال این است که قسمت حقیقی z منفی است پس باید قسمت حقیقی تابع Ln هم منفی باشد :

$$\operatorname{Ln} r < 0 \Rightarrow 0 < r < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{(1+u)^2+v^2}}{\sqrt{(1-u)^2+v^2}} < 1$$

$$\sqrt{(1+u)^2 + v^2} < \sqrt{(1-u)^2 + v^2} \Rightarrow 4u < 0 \Rightarrow u < 0$$

بنابراین، گزینه ۴ صحیح است.

روش دوم : می‌توانیم با در نظر گرفتن نقاط مرزی روی محور موهومی($y = \pm ia$) و انتقال آن‌ها از صفحه‌ی z به w ناحیه نگاشت شده را به دست آورد.

پاسخ سوال ۱۲

یادآوری : اگر تابعی در تمام صفحه تحلیلی (تابع تام) و کراندار باشد ، آنگاه تابعی ثابت است.

چون $f(z)$ در تمام صفحه تحلیلی است پس تابع $g(z) = f(z) + i - z^2$ نیز در کل صفح تحلیلی است و چون کراندار بوده در نتیجه $g(z)$ تابع ثابت است.

$$g(۰) = cte = f(۰) + i = ۱ + i$$

$$g(۲) = f(۲) + i - ۴ = ۱ + i \qquad f(۲) = ۵$$

بنابراین، گزینه ۴ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳

جهت استفاده از بسط مک لورن $u = z - i$ و در نتیجه $z = u + i$ و صورت سوال ضریب $u^۵$ را می خواهد :

$$(u + i)(\sin u \cos i + \cos u \sin i) = (u + i)(\sin u \cosh ۱ + i \cos u \sinh ۱)$$

$$(u + i)[(u - \frac{u^۳}{۳!} + \frac{u^۵}{۵!} - \cdots) \cosh ۱ + i (۱ - \frac{u^۲}{۲!} + \frac{u^۴}{۴!} - \cdots) \sinh ۱]$$

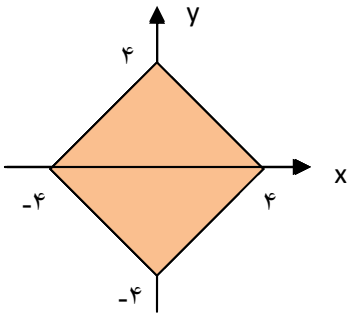
بنابراین ضریب $u^۵$:

$$\frac{i}{۵!} (\cosh ۱ + ۵ \sinh ۱)$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۴

نقاط غیرتحلیلی $e^z + ۱ = ۰ \qquad z = \pm \pi i , \pm ۳\pi i , \pm ۵\pi i , ...$



در بین این نقاط غیر تحلیلی، فقط دو نقطه‌ی $\pm\pi i$ داخل خم قرار دارد و $f(z) = z$.

$$\oint_C \frac{z}{1+e^z}dz = 2\pi i\,[\,f(z=\pi i) + f(z=-\pi i)] = 0$$

بنابراین، گزینه ۱ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۵

θ در طوق از ۰ تا 2π تغییر می‌کند ($L = 2\pi$) و از طرفی مطابق با سری فوریه مختلط :

$$F(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} F(\theta)\, e^{-in\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, e^{-in\theta}$$

بنابراین، گزینه ۳ صحیح است.